T o l l m i e n , Walter
Diss. rer.nat. Göttingen 1924

Zeitliche Entwickelung der laminaren Grenzschichten am rotierenden Zylinder.

+

SUB Göttingen 7
207 195 439

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät

der

Georg-August Universität

zu Göttingen

+

vorgelegt

von

W a l t e r T o l l m i e n

aus

Wittenberg.

BIBLIOTECA ACADEMIA GEORGIAE AUG.

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Mai 1924.

Referent: Herr Prof. Dr. L.Prandtl.

Digitalisiert dank
freundlicher Unterstützung
von

Dr. Cordula Tollmien

www.DigiWunschbuch.de

EX
BIBLIOTHECA
REGIA ACADEM.
GEORGIAE
AUG.

Inhalt.

Vorbemerkungen:

Grundlagen aus der Grenzschichttheorie.

§ 1. Die Differentialgleichung der Grenzschicht. S. 1

§ 2. Der Impulssatz der Grenzschichttheorie. S. 2

Kap. I. Allgemeine Diskussion.

§ 1. Die Differentialgleichung des Problems und ihre Vereinfachung. S. 3

§ 2. Formale Eigenschaften der charakteristischen Differentialgleichungen. S. 8

§ 3. Physikalische Deutung der mathematischen Ergebnisse. S.11

Kap. II. Spezielle Diskussion.

§ 1. Bei unveränderter äusserer Potentialströmung. S.17

§ 2. Bei veränderlicher äusserer Potentialströmung. S.23

Vorbemerkungen:

Grundlagen aus der Grenzschichttheorie.

§ 1. Die Differentialgleichung der Grenzzschicht.

Die Prandtl' sche Grenzschichttheorie hat es zuerst ermöglicht, die Bewegungen einer Flüssigkeit mit kleiner Zähigkeit theoretisch in befriedigender Weise zu erfassen.[1] Die Annahme der Grenzschichttheorie geht dahin, dass nur in einer dünnen Schicht um den umströmten Körper, der "Grenzschicht", die Reibung Einfluss hat, da die Flüssigkeit an der Wand haftet, dass aber in weiter Entfernung sich annähernd Potentialströmung einstellt. Durch eine Abschätzung der Glieder der Navier-Stokes schen Differentialgleichungen gelangt man so zur Differentialgleichung der Grenzschicht, die 1904 von Prandtl[1] aufgestellt wurde und für Strömungen in der Ebene längs der Geraden $y = 0$ lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \cdots (1).$$

Der Druckverlauf ist durch die Potentialströmung U ausserhalb der Grenzschicht bestimmt:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$$

Zur weiteren Bestimmung treten noch hinzu die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und die Haftbedingungen an der Wand $y = 0$.

---

1) L.Prandtl: Verhandl.d. III. intern.Math.Kongress 1904 (Heidelberg)-Leipzig 1905. S.484.

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir eine krumme Wand haben und als Koordinaten die Bogenlänge x und den senkrechten Abstand vom Körper y verwenden.

Von Blasius[1], Boltze[2], Hiemenz[3] ist die Differentialgleichung der Grenzschicht für einige Fälle integriert mit Hilfe von Aehnlichkeitsbetrachtungen, Reihenentwickelungen usw. Vor allem wurde dabei die Ablösung der Strömung von der Wand erklärt.

§ 2. Der Impulssatz der Grenzschichttheorie.

Eine Vereinfachung der Rechnung ist durch Einführung der Integralbedingung erzielt worden, die v. Karman[4] 1921 aufstellte. Nimmt man an, dass für $y \geqq \delta$ keine merkliche Abweichung der Strömung von der Potentialbewegung vorhanden ist, (δ "Grenzschichtdicke," Funktion von x u. t.) so können wir durch Integration der Differentialgl. d. Grenzschicht (1) nach y zwischen den Grenzen 0 und δ die Integralbedingung erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \varrho u\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u^2\,dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u\,dy = -\delta\frac{\partial p}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Glied ist falsch! statt dessen: $\int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dy$.

Diese Integralbedingung ist inhaltlich identisch mit dem Impulssatz.

Wenn wir für das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ in der Grenzschicht $(0 \leqq y \leqq \delta)$ einen Näherungsausdruck einführen, so bekommen wirdurch die Integralbedingung eine Differentialgleichung für δ, die Grenzschichtdicke, als Funktion von x und t.

Pohlhausen[5] hat das Verfahren auf eine Reihe praktisch wichtiger Fälle des stationären Problems angewandt

---

1) H.Blasius. Diss.Göttingen 1907.Zeitschr.f.Math.u.Phys. 56. 1908. S.1.
2) E.Boltze. Diss.Göttingen 1908.
3) K.Hiemenz. Diss. Göttingen 1911. Dinglers polyt.Journ. Bd. 326, 1911. S.321.
4) Th.v.Karman. Zeitschr.f.angew.Math.u.Mechan. Bd.1. 1921 S.233.
5) K.Pohlhausen. Zeitschr.f.angew. Math.u.Mechan. Bd.1. 1921. S.252.

und gute Annäherung an die Ergebnisse erzielt, die man aus der Behandlung der ursprünglichen Prandtl'schen partiellen Differentialgleichung gewonnen hat.

Kap. I. Allgemeine Diskussion.

§ 1. Die Differentialgl. d. Problems und ihre Vereinfachung.

Zweck der vorliegenden Arbeit soll es sein, die Strömung um einen in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten rotierenden Zylinder zu betrachten. Es wird sich dabei als notwendig erweisen, vor allem auch die zeitliche Entwickelung der Grenzschichtszustände zu berücksichtigen.

Wir gehen dabei von einem vereinfachten Bilde aus: Das ganze System: strömende Flüssigkeit und rotierender Zylinder, soll plötzlich, mit einem Ruck in Gang gesetzt werden, von da ab $[t=0]$ aber konstante Geschwindigkeit haben. Untersuchungen von Blasius (*l.c.*) haben gezeigt, dass dies vereinfachte Bild zulässig ist. Unter der Wirkung der durch den Stoss hergestellten Druckverteilung wird sich zunächst der Zustand der Potentialströmung einstellen, die Grenzschichtdicke δ also σ sein, später bildet sich dann die Grenzschicht unter der Wirkung des Reibungsgliedes und dann der konvektiven Glieder aus.

Wir setzen ähnlich wie Pohlhausen

$$u = U - q(x,y,t).$$

Die Integralbedingung wird dann

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta q\,dy - 2\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta q\,dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta q\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta q^2\,dy = -\nu\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 \quad \ldots (2)$$

Für $u(y)$ nehmen wir einen Ansatz 4. Grades:

$$u = a + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 \quad \cdots (3)$$

Im folgenden wollen wir U als zeitlich konstant voraussetzen. Als Grenzbedingungen sind vorgegeben:

1) für $y = 0$, $u = \omega$ wo ω die Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders bedeutet.

2) für $y = \delta$, $u = U$,

3) für $y = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = -U\frac{dU}{dx}\frac{1}{\nu}$

wenn ich voraussetze, dass für $y = \delta$ die Differentialgleichung der Grenzschicht (1) erfüllt ist. Fordern wir, dass $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ für $y = \delta$ stetig bleibt, so können wir, da $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in der Potentialströmung sehr klein gegenüber den Werten im Innern der Grenzschicht sind, genähert als weitere Grenzbedingungen angeben:

4) für $y = \delta$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

5) für $y = \delta$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Es berechnet sich hieraus:

$$a = \omega,$$

$$a = \frac{2(U-\omega) + \frac{U\lambda}{6}}{\delta}, \quad b = -\frac{U\lambda}{2\delta^2},$$

$$c = \frac{-2(U-\omega) + \frac{U\lambda}{2}}{\delta^3}, \quad d = \frac{(U-\omega) - \frac{U\lambda}{6}}{\delta^4}, \quad (4)$$

wobei λ die dimensionslose Zahl $\frac{dU}{dx}\frac{\delta^2}{\nu}$ bedeutet. u ist damit in Abhängigkeit von U und δ bestimmt. Um die letzte Unbekannte $\delta(x,t)$ zu bestimmen, setzen wir für $q = U - u$ den Wert aus (3) und (4) in die Integralbedingung (2) ein und erhalten damit eine Differentialgleichung für δ, Diese lautet, auf ihre einfachste F

gebracht, indem wir $\frac{r}{v^2} = z$, $\frac{du}{dx} = u'$, $\frac{d^2u}{dx^2} = u''$ setzen, (wobei $\lambda = zu'$ wird):

$$\frac{\partial z}{\partial t}\left[-680{,}4(u-\omega) + 56{,}7\,u\lambda\right] + \frac{\partial z}{\partial x}1{,}25\left[(-213{,}12 + 5{,}76\lambda + \lambda^2)u^2 + u\omega(-118{,}08 + 39{,}6\lambda) + 331{,}2\,\omega^2\right]$$

$$= -9072(u-\omega) + \lambda(1670{,}4u - 10656\omega) + \lambda^2\left(-47{,}4u - 4{,}8\frac{u^2u''}{u'^2} - 330\omega - 33\frac{uu''\omega}{u'^2}\right) - u\lambda^3\left(1 + \frac{uu''}{u'^2}\right) \qquad (5)$$

Als Anfangsbedingung haben wir $z = \sigma$ für $t = \sigma$ Gesucht ist z als Funktion von x und t, oder geometrisch gesprochen, eine Integralfläche $z(x,t)$. Es ist nun möglich die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen, indem man die auf der Integralfläche liegenden "charakterischen Kurven" konstruiert und aus ihnen die Integralfläche aufbaut. (Canchysche Charakteristikenmethode[1]).

Die vorliegende partielle Differehtialgleichung (5) kann ich auf die Form bringen:

$$P(xz)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(xz)\frac{\partial z}{\partial t} + R(xz) = 0 \ldots (5^a)$$

Die charakteristischen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{R(xz)}{P(xz)} \qquad (6)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{Q(xz)}{P(xz)}. \qquad (7)$$

Durch die Schar der Charakteristiken, die durch dies

---

1) vgl. etwa Horn: Part. Differentialgl. Leipzig 1910. § 10 ff. bes. § 12.
oder Bieberbach: Differentialgleichg. Berlin 1923. III. Abschnitt. § 2. S. 203.

simultane Gleichungssystem bestimmt sind und durch die Randkurve $z = 0, t = 0$ hindurchgehen, ist die gesuchte Integralfläche bestimmt. (6) ist dabei unabhängig von (7) zu lösen, da t in (6) nicht auftritt. (6) ist die Differentialgleichung, die für das stationäre Problem gilt; denn die ursprüngliche Differentialgleichung (5) bezw. (5a) reduziert sich, wenn man z als von t unabhängig, stationär vorausgesetzt, zu

$$P(xz)\frac{dz}{dx} + R(xz) = 0 \quad , \text{ was}$$

mit (6) identisch ist.

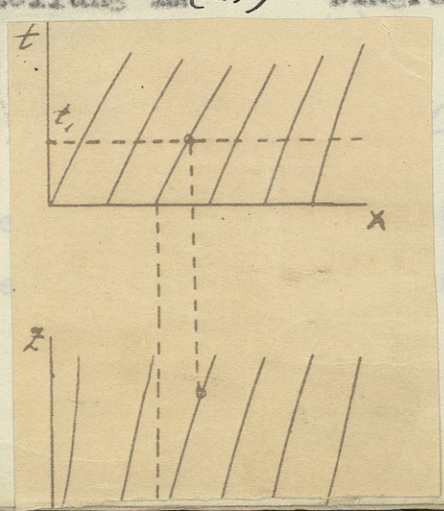
Zu jeder $z(x)$ = Kurve (6) [beliebige Integrationskonstante, einparametrige Kurvenschar] gehört diejenige $t(x)$ = Kurve (7), die bei $z = 0, t = 0$ hat.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0{,}8\,[-9072(u-w) + \lambda(1670{,}4u - 1065{,}6w) + \lambda^2(-448u - 48\frac{u^2u''}{u'^2} - 336w - 33\frac{uu''w}{u'^2}) - u\lambda^3(1 + \frac{uu''}{u'^2})]}{u^2(-213{,}12 + 5{,}76\lambda + \lambda^2) + uw(-118{,}08 + 39{,}6\lambda) + 331{,}2w^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{0{,}8\,[-680{,}4(u-w) + 56{,}7u\lambda]}{u^2(-213{,}12 + 5{,}76\lambda + \lambda^2) + uw(-118{,}08 + 39{,}6\lambda) + 331{,}2w^2}$$

Aus diesen Darlegungen erhellt, dass man mit einem geringen Mehraufwand an Rechnung, als das stationäre Problem (6) erfordern würde, den zeitlichen Verlauf nach dieser Methode beherrschen kann. Es wird sich herausstellen, dass auch für die Lösung des stationären Problems die Betrachtung des zeitlichen Verlaufes notwendig ist.

Wollen wir den Verlauf von z für eine bestimmte Zeit t_1 ermitteln, so ziehen wir bei graphischer Darstellung im (tx) = Diagramme die Gerade $t = t_1$ und projizieren die Schnittpunkte mit den $t(x)$ = Kurven auf die zugehörigen $z(x)$ = Kurven. Die Verbindungskurve dieser Projektionen gibt dann $z(x, t_1)$.



In manchen Fällen wird es sich zweckmässig erweisen, neben den Projektionen der charakteristischen Kurven in der (z,x) - und der (t,x) - Ebene, die wir bisher betrachteten, auch ihre Projektion in der (z,t) - Ebene heranzuziehen, deren Differentialgleichung nach der Charakteristikentheorie

(8) $$\frac{dz}{dt} = -\frac{R(x,z)}{Q(x,z)}$$ ist.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-907{,}2(u-w)+\lambda(1670{,}4u-1065{,}6w)+\lambda^2(-47{,}4u-48\frac{u''u^4}{u'^2}-33w-33\frac{uu''w}{u'^2})-u\lambda^3(1+\frac{uu''}{u'^2})]}{-680{,}4(u-w)+56{,}7u\lambda}$$

An einem Beispiel möge das Verfahren erläutert werden. Es sei $u=0, u'=0, u''=0$. Die charakteristischen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0{,}8\cdot 907{,}2\,w}{331{,}2\,w^2} = \frac{504}{23w},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{0{,}8\cdot 680{,}4\,w}{331{,}2\,w^2} = \frac{37{,}8}{23w}.$$

Folglich $z = \frac{504}{23w}x + c_1$, $t = \frac{37{,}8}{23w}x + c_2$.

Durch Elimination von x erhalte ich:

$$z = \left(\frac{t\,23w}{37{,}8} - c_2\frac{23w}{37{,}8}\right)\frac{504}{23w} + c_1.$$

Aus der Anfangsbedingung $z=0$ für $t=0$ bestimmt sich

$$z = t\,\frac{504}{37{,}8},$$

$$\delta = \sqrt{\frac{504}{37{,}8}\nu t}.$$

Unser Ansatz (3) u. (4) liefert hier:

$$u = w\left(1-\frac{2}{\delta}y+\frac{2}{\delta^3}y^3-\frac{1}{\delta^4}y^4\right)$$

Die Differentialgleichung der Grenzschicht (1) lautet in diesem Falle in Uebereinstimmung mit den Navier-Stokes'schen

Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangs- und Grenzbedingungen erhalten wir als Lösung

$$u = \omega\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\tau^2} d\tau\right), \quad \text{wobei}$$

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ ist. Wir stellen die Werte von $\omega - u$ für $\nu = 1, t = 1$ nach der Näherung und der exakten Lösung in einer Tabelle gegenüber.

y	$\omega - u$ Näherg.	Exakt
0	0	0
0,5	0,267	0,276
1	0,512	0,520
1,5	0,690	0,711
2	0,857	0,843
2,5	0,945	0,922
3	0,989	0,965
3,5		0,987

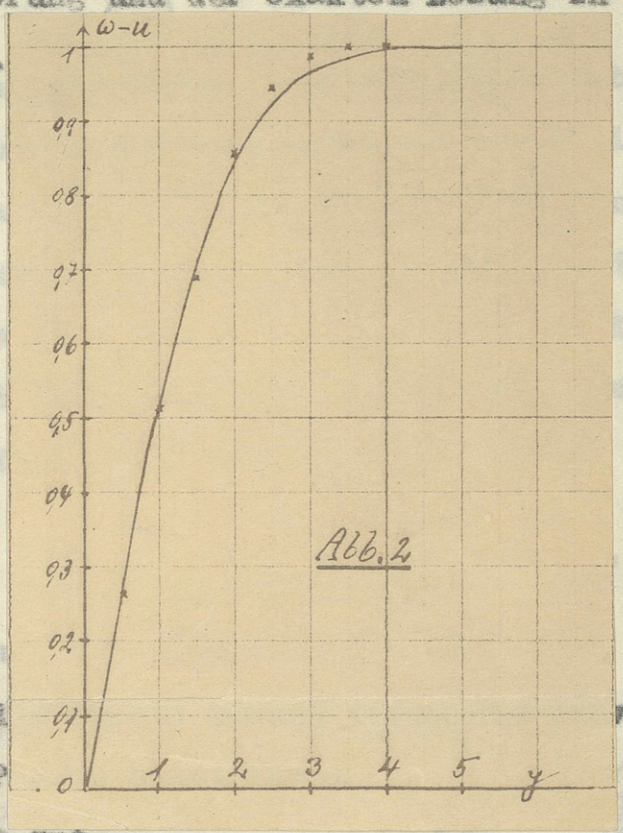


Abb. 2

In der Abbildung 2 ist d … re, die Näherung durch die P… Die Annäherung ist recht gut.

§ 2. Formale Eigenschaften der charakteristischen Differentialgleichungen.

Die charakteristischen Differentialgleichungen (6) und (7) wollen wir graphisch mit Hilfe des Isoklinenverfahrens lösen. Zunächst sollen einige formale Eigenschaften festgestellt werden. Von Wichtigkeit sind zuerst die Isoklinen, auf denen $\tau' = \frac{d\tau}{dx}$ bezw. $t' = \frac{dt}{dx}$ ∞ wird.

Differentialgleichungen:

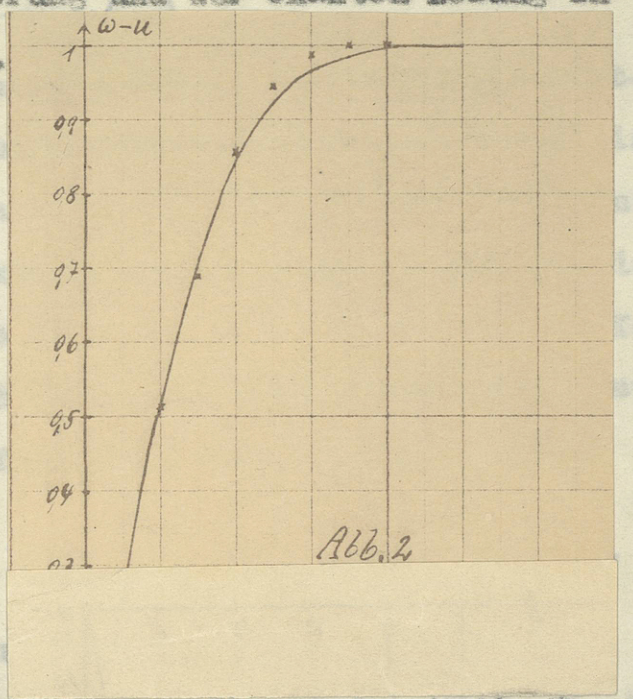
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangs- und Grenzbedingungen erhalten wir als Lösung

$$u = \omega\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz\right), \quad \text{wobei}$$

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ ist. Wir stellen die Werte von $\omega - u$ für $\nu = 1, t = 1$ nach der Näherung und der exakten Lösung in einer Tabelle gegenüber.

y	$\omega - u$ Näherg.	Exakt
0	0	0
0,5	0,267	0,276
1	0,512	0,520
1,5	0,690	0,711
2	0,857	0,843
2,5	0,945	0,923
3	0,989	0,965
3,5		0,987



In der Abbildung 2 ist die exakte Lösung durch die Kurve, die Näherung durch die Punkte bezeichnet.
Die Annäherung ist recht gut.

§ 2. Formale Eigenschaften der charakteristischen Differentialgleichungen.

Die charakteristischen Differentialgleichungen (6) und (7) wollen wir graphisch mit Hilfe des Isoklinenverfahrens lösen. Zunächst sollen einige formale Eigenschaften festgestellt werden. Von Wichtigkeit sind zuerst die Isoklinen, auf denen $z' = \frac{dz}{dx}$ bezw. $t' = \frac{dt}{dx}$ ∞ wird.

Es ist nach (6) und (7)

$$z' = \frac{0{,}8\,[-9072(u-\omega)+\lambda(1670{,}4u-1065{,}6\omega)+\lambda^2(-47{,}4u-4{,}8\frac{u^3u'}{u'^2}-33\omega-33\frac{u^2\omega}{u'^2})]}{(17{,}76u+27{,}6\omega+u\lambda)(-12u+12\omega+u\lambda)}$$

$$t' = \frac{0{,}8\,[-680{,}4(u-\omega)+56{,}7u\lambda]}{(17{,}76u+27{,}6\omega+u\lambda)(-12u+12\omega+u\lambda)}$$

$$= \frac{0{,}8\cdot 56{,}7}{17{,}76u+27{,}6\omega+u\lambda)}.$$

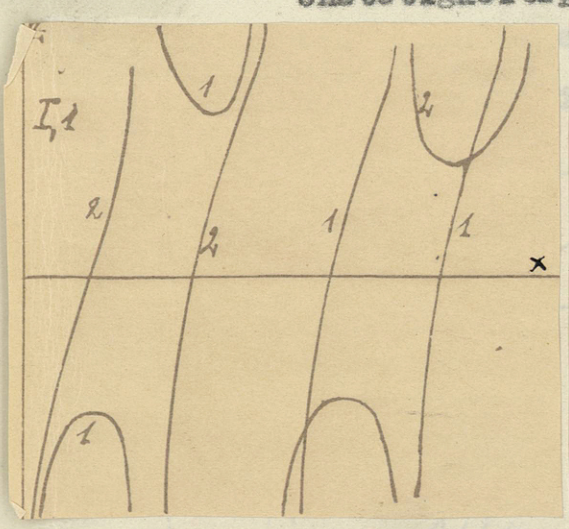
demnach wird, wenn $\omega \neq 0$ ist, $z' = \infty$

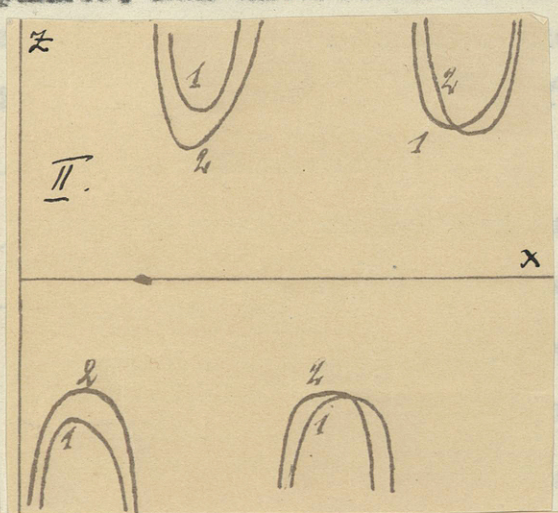
1) für $\lambda_1 = -17{,}76 - 27{,}6\,\frac{\omega}{u}$

2) für $\lambda_2 = 12(1-\frac{\omega}{u})$.

Mache ich über die Potentialbewegung folgende Voraussetzung: u soll vom Staupunkt nach beiden Seiten des Zylinders zu einem Extremum ansteigen, abfallen und sich hinten wieder in einem Staupunkt zusammenschliessen, so kann ich einige Aussagen über die Lage von $z' = \infty$ machen. Das Koordinatensystem will ich so legen, dass der vordere Staupunkt in den Nullpunkt fällt und dass ω stets positiv ist.

Die Kurven $z' = \infty$ haben bei $u = 0$ und $u' = 0$ Unstetigkeitspunkte. Man unterscheidet folgende Fälle:





I. $\frac{\omega}{u_{max}} < 1.$

1. $\frac{\omega}{u_{min}} > -\frac{17{,}76}{27{,}6}$

2. $\frac{\omega}{u_{min}} < -\frac{17{,}76}{27{,}6}$

II. $\frac{\omega}{u_{max}} > 1.$

Bei $\omega = 0$ wird $z' = \infty$

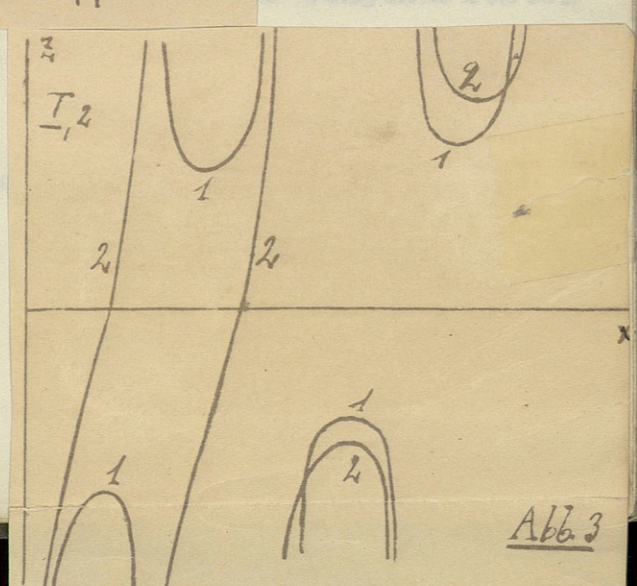


Abb. 3

1) für $\lambda_1 = -17{,}76$,
2) für $\lambda_2 = 12$,
3) für $u = 0$.

Die Diskussion der Kurven $z' = \infty$ wird uns erlauben, verschiedene Typen unseres problems zu unterscheiden.

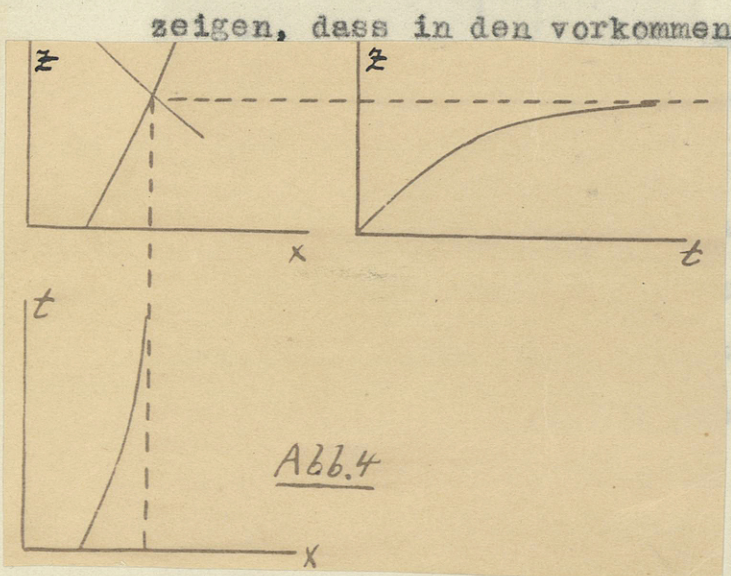
Die Isoklinen $z' = 0$ lassen sich nicht so leicht in ihrem allgemeinen Verlauf festlegen. Einzelne Punkte dieser sehr wichtigen Kurven sind für $w \neq 0$

1) für $u = 0$, $z' = 0$ bei $\lambda = 6{,}997 u. \; -39{,}3$

2) für $u' = 0$, $z' = 0$ bei $z = \sqrt{\frac{9072(w-u)}{uu''(4{,}8u+33w)}}$.

Was die charakteristische Gleichung (7) betrifft, so wird $t' = \infty$ für $\lambda = \lambda_1 = -17{,}76 - 27{,}6\frac{w}{u}$. Dagegen wird $t' \neq \infty$ für $\lambda = \lambda_2$. Ebenso wird t' niemals 0.

Singularitäten können in den charakteristischen Differentialgleichungen auftreten, wenn $z' = \frac{0}{0}$ wird, also ein Schnittpunkt der Isoklinen $z' = 0$ und $z' = \infty$ eintritt. - Die singulären Punkte auf $\lambda = \lambda_1 = -17{,}76 - 27{,}6\frac{w}{u}$ mögen als singuläre Punkte 1. Art bezeichnet werden. Uns interessieren dabei besonders solche Punkte, deren eine singuläre Kurve die x-Achse schneidet. Es wird sich zeigen, dass in den vorkommenden Fällen t für diese Punkte im (tx)- bezw. (zt)-Diagramme nach ∞ geht. In einem speziellen Fall wird diese Tatsache analytisch bewiesen werden.



A66.4

Was die Singularitäten auf $\lambda = \lambda_2 = 12\left(1 - \frac{w}{u}\right)$ betrifft, so tritt eine solche "Singularität 2.Art" immer ein für $z = 0$, $w = u$ und zwar ist dieser Punkt im allgemeinen ein Strudelpunkt,

was auf die gewöhnliche Art durch Reihenentwicklung des Zählers und Nenners von z' bewiesen werden kann. Doch sind an anderen Stellen durchaus noch andere singuläre Punkte z.B. Sattelpunkte möglich. Was geschieht dabei im $(tx)=$ Diagramm? Wir haben an die Tatsache anzuknüpfen, dass für $\lambda = \lambda_2$ t' endlich bleibt. Habe ich im $(zx)=$ Diagramm also Kurven, die λ_2 schneiden und die x = Achse einmal treffen, so bekomme ich im $(tx)=$ Diagramm Rückkehrpunkte. Schneiden die fraglichen Kurven die x =Achse zweimal, wie z.B, beim Strudelpunkt $u=w$, $z=0$ so schliessen sich die Projektionen im tx =Diagramm nicht. Konstruiere ich auf die übliche Art $z(xt)$ für konstantes $t=t_1$, so erhalte ich einen Sprung in $z(x,t_1)$. Diese Tatsachen spiegeln sich analog im $(zt)=$ Diagramm wieder.

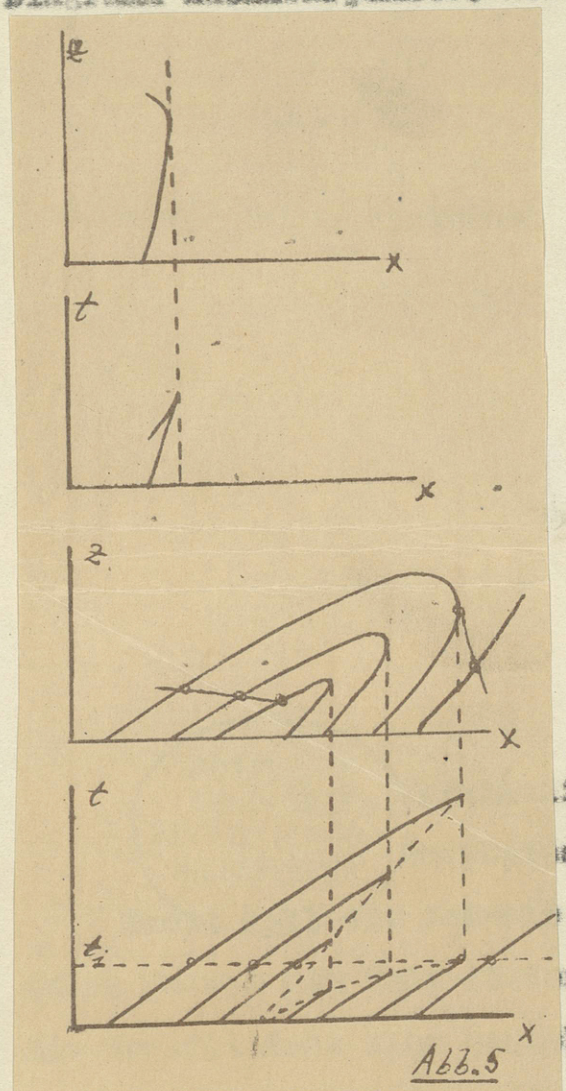


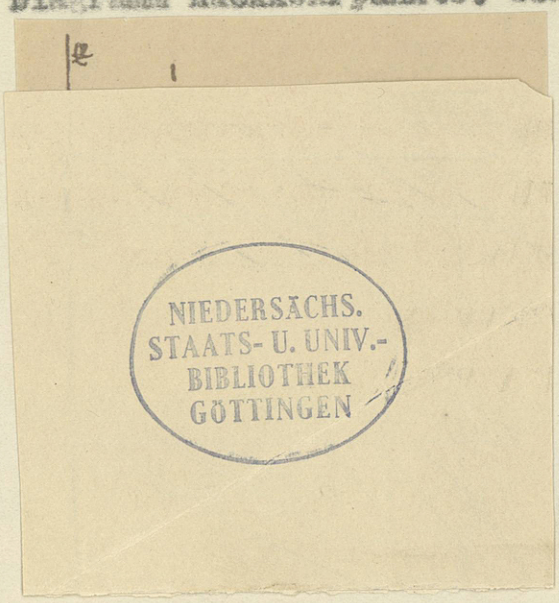
Abb.5

...ische Deutung der mathem. ...se.

... Diskussion der charakteristi- ...n. An einem Beispiel sollen ...ht und die mathematischen Er- gebnisse physikalisch gedeutet werden.

Die eingeprägte Strömung u sei gleich der ursprünglichen Potentialströmung um den Zylinder (ohne Zirkulation). Es sei $u=2\gamma \sin\frac{x}{r}$ und $w=\gamma$. γ ist dann die Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit, r der Zylinderradius. Wir konstruieren in der besprochenen Weise

was auf die gewöhnliche Art durch Reihenentwicklung des Zählers und Nenners von z' bewiesen werden kann. Doch sind an anderen Stellen durchaus noch andere singuläre Punkte z.B. Sattelpunkte möglich. Was geschieht dabei im $(tx)=$ Diagramm? Wir haben an die Tatsache anzuknüpfen, dass für $\lambda = \lambda_2$ t' endlich bleibt. Habe ich im $(zx)=$ Diagramm also Kurven, die λ_2 schneiden und die x = Achse einmal treffen, so bekomme ich im $(tx)=$ Diagramm Rückkehrpunkte. Schneiden die fraglichen Kurven die x =Achse zweimal, wie z.B, beim Strudelpunkt $u=w$, $z=0$ so schliessen sich die Projektionen im tx = Diagramm nicht. Konstruiere ich auf die übliche Art $z(xt)$ für konstantes $t=t_1$, so erhalte ich einen Sprung in $z(x,t_1)$. Diese Tatsachen spiegeln sich analog im $(zt)=$ Diagramm wieder.


NIEDERSÄCHS.
STAATS- U. UNIV.-
BIBLIOTHEK
GÖTTINGEN

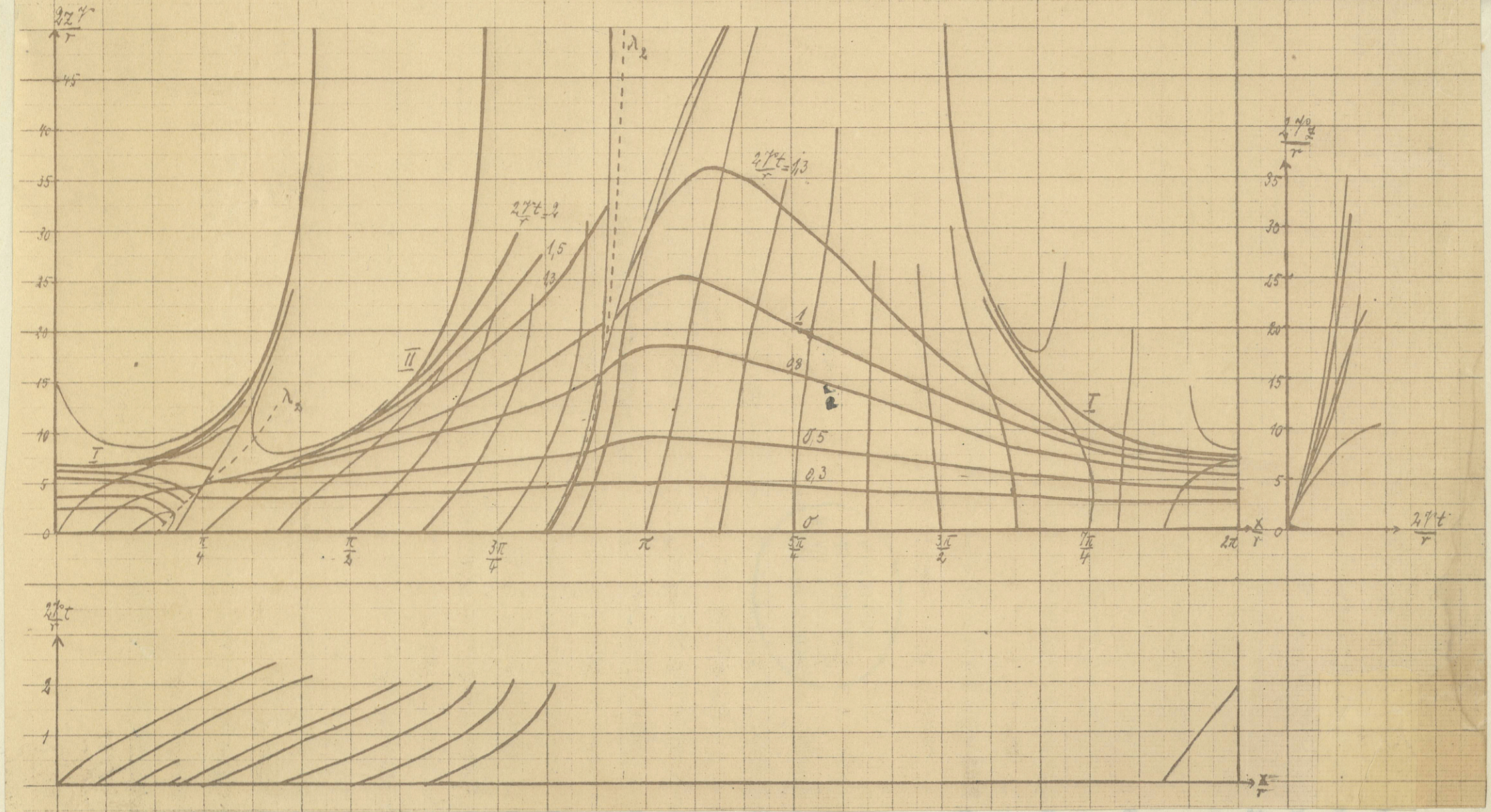
§ 3. Physikalische Deutung der mathem. Ergebnisse.

Damit soll die formale Diskussion der charakteristischen Kurven ein Ende finden. An einem Beispiel sollen die Verhältnisse klar gemacht und die mathematischen Ergebnisse physikalisch gedeutet werden.

Die eingeprägte Strömung u sei gleich der ursprünglichen Potentialströmung um den Zylinder (ohne Zirkulation). Es sei $u=2\gamma \sin\frac{x}{r}$ und $w=\gamma$. γ ist dann die Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit, r der Zylinderradius. Wir konstruieren in der besprochenen Weise

$U = 2\gamma^0 \sin\frac{x}{\gamma}$, $\omega = \gamma$.

Abb. 6.



die $z(x\,t)$ Kurven für mehrere Zeiten (Abb.6), wobei wir in denjenigen Gebieten, wo die Kurven des $(z\,x)$ Diagrammes steil verlaufen, am besten das (z,t) anstatt des $(t\,x)$ = Diagrammes verwenden. [Statt z, t und x sind in den Figuren die dimensionslosen Grössen $\frac{z\gamma_0 z}{r}, \frac{z\gamma_0 t}{r}$ u. $\frac{x}{r}$ aufgetragen.] Dabei bemerken wir, dass diese so konstruierten "temporären Kurven" sich gewissen $(z\,x)$ = Kurven mit wachsenden t nähern. Im 4. Quadranten des $(z\,x)$ = Diagrammes haben wir einen singulären Punkt 1. Art und zwar einen Sattelpunkt. t rückt für diesen Punkt, wie die Diagramme zeigen, nach ∞ ; die temporären Kurven nähern sich derjenigen singulären Kurve durch den Sattelpunkt, welche die x = Achse nicht schneidet, asymptotisch. Mit andern Worten: Diese singuläre Kurve (I) ist die stationäre Lösung.

Seltsamerweise weist die zeitliche Entwickelung von z in der Umgebung von $u = \omega$ einen Sprung bezw. eine Lücke auf, wie wir schon oben (S.11) bewiesen. Was hat das physikalisch zu bedeuten?

Gehen wir auf die Differentialgleichung der Grenzschicht (1) zurück und lösen diese im Anschluss an die von Blasius (1-c-) für $\omega = 0$ gegebene Lösung, so erhalten wir:

$$u = \sum_0^\infty \kappa t^\kappa \frac{\partial \chi_\kappa(x\eta)}{\partial \eta}, \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}},$$

und, falls wir uns, wie Blasius, auf 2 Glieder beschränken:

$$u = (u-\omega)\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{du}{dx} t\left[\frac{6}{\pi}\eta e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right.\right.$$
$$+ \frac{2}{\pi}(2\eta^2 - 1)\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}$$
$$- \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} +$$
$$\left.\left.\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}}\right)\left(\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2+1)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right)\right]\right\}$$
$$+ \omega\left\{1 + \frac{du}{dx} t \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2\eta^2\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \eta e^{-\eta^2}\right]\right\}$$

Bei $u=\omega$ zeigt sich nichts Besonderes.

Unser Näherungsverfahren beruhte darauf, dass wir für $y=0$ und $y=\delta$ die Differentialgleichung d. Grenzschicht (1), für das Zwischengebiet den Impulssatz (Integralbedingung) (2) erfüllten. Dies Näherungsverfahren scheint also im fraglichen Gebiet zu versagen. Wir versuchten, durch andere Ansätze für $u(y)$, Erfüllung des Impulssatzes für 2 Teilgebiete der Grenzschicht u.ä. dies scheinbare Versagen zu beseitigen- Ausgedehnte systematische Versuche in dieser Richtung hatten ein negatives Ergebnis.

Die Erklärung für das Verhalten liegt vielmehr darin, dass in diesem Gebiet 2 Werte der Grenzschichtdicke möglich sind.

Wie eine derartige Doppeldeutigkeit zustande kommen kann, soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Eine ebene Wand werde in einer ruhenden Flüssigkeit in sich verschoben nach dem zeitlichen Gesetz $u_0 = \cos t$

1) Die Lösung der Differentialgleichung der Grenzschicht (1) ist

$$u = e^{-\frac{1}{\sqrt{2\nu}} y} \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2\nu}} y + t\right)$$

(nach dem Verstreichen längerer Zeit, nicht vom Beginn der Bewegung ab) (Abb.7)). Wir sehen, dass das Profil mehrfach ausbiegt und die Tatsache, dass u mehrfach den Wert $u=0$ annimmt, weist uns schon auf die Möglichkeit mehrerer Werte der "Grenzschichtdicke" hin, die ja durch $u = U$ charakterisiert war.

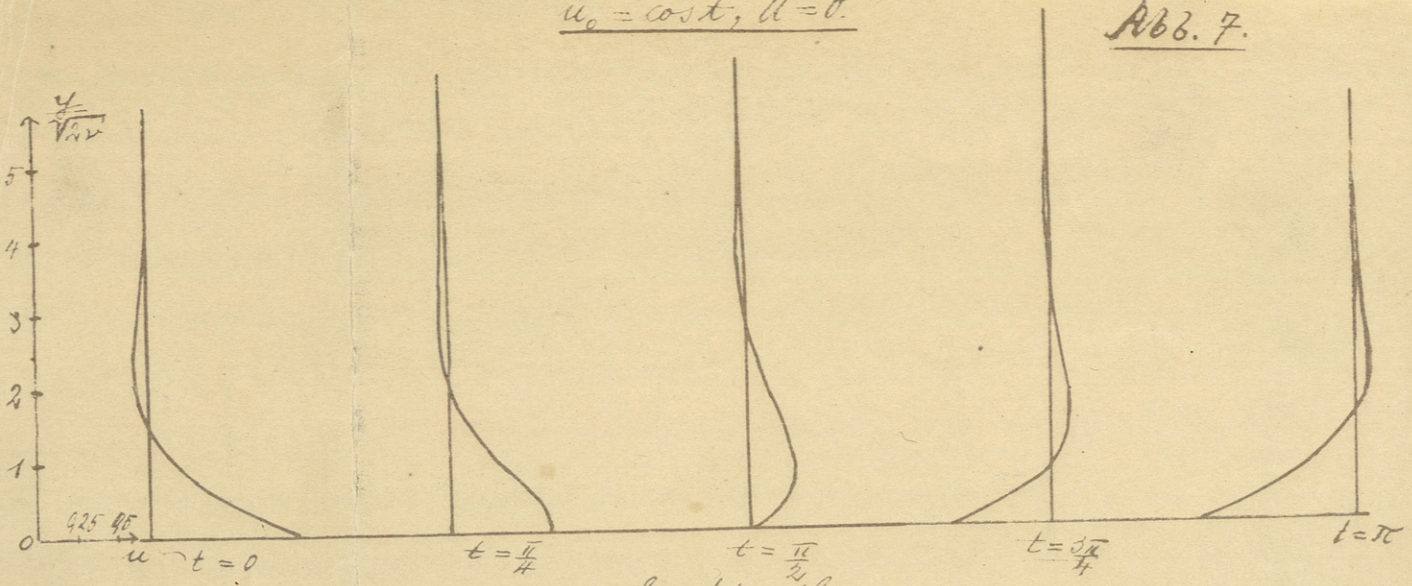
2) Wir wenden auf das Problem unser Näherungsverfahren an, indem wir für $y=0$ die Differentialgleichung der Grenzschicht (1), für das übrige Gebiet den Impulssatz (2) anwenden:

$$u = \cos t + \frac{\sin t\, z - 2\cos t}{2\delta} y - \frac{\sin t}{2\delta}$$

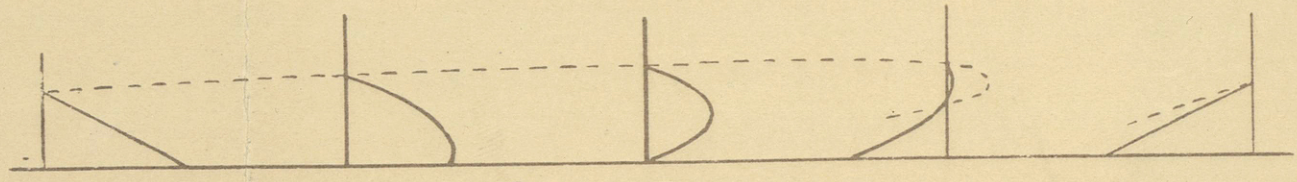
$$\frac{dz}{dt} = \delta \frac{\cos t \left(1 - \frac{z^2}{12}\right)}{2\cos t + \sin t\, z}.$$

$u_0 = \cos t$; $U = 0$.

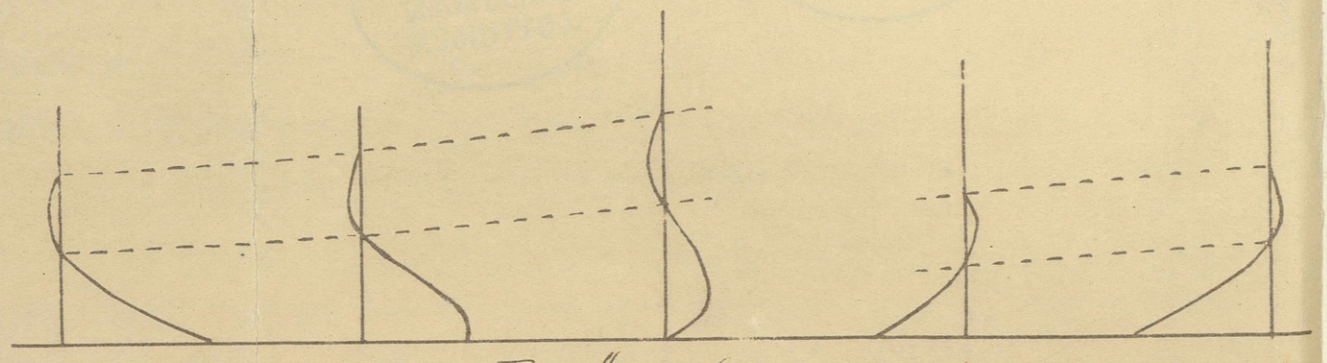
Abb. 7.



I. Exakte Lösung.



II. 1. Näherung.



III. Überschlagsbild d. 2. Näherung.

Die Anfangsbedingung erhalten wir, indem wir für $t=0$ den Wert von $\int_0^\delta u\,dy$ für die exakte Lösung und die Näherung übereinstimmen lassen. (Abb.7,II).

Es zeigt sich, dass nicht überall das mehrfache Verschwinden von u im exakten Profil von der Näherung wiedergegeben wird, dass aber in einem Teilgebiet doppelte Werte von δ auftreten. Die Geschwindigkeitsprofile, die zu den zwei Werten von δ gehören, sind dabei sehr ähnlich, wie die Figur zeigt; die Doppeldeutigkeit bringt daher keinen ernsten Schaden.

3. Wir suchen die exakte Lösung auf folgendem Wege noch mehr anzunähern. Den Ansatz

$$u = A_0 + A_1 y + A_2 \frac{y^2}{2!} + A_3 \frac{y^3}{3!} \cdots$$

denken wir uns in die Diffgl. d. Grenzschicht (1) eingesetzt:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial t} y + \cdots A_0 \frac{dA_1}{\partial t} y + \cdots = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu A_2\right) + \nu A_3 y \cdots$$

wenn wir uns auf die Glieder 0. und 1. Ordnung in y beschränken.

Dadurch, dass wir die Differentialgleichung (1) für $y=\delta$ erfüllen:

$$\nu A_2 = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial A_0}{\partial t}$$

haben wir sie (1) in den Gliedern 0. Ordnung befriedigt. Der Gedanke liegt nahe, darüberhinaus auch in den Gliedern 1. Ordnung Uebereinstimmung herbeizuführen:

$$\nu A_3 = \frac{\partial A_1}{\partial t} + A_0 \frac{\partial A_1}{\partial x}$$

Im vorliegenden Falle also:

$$\nu A_3 = \frac{\partial A_1}{\partial t};$$

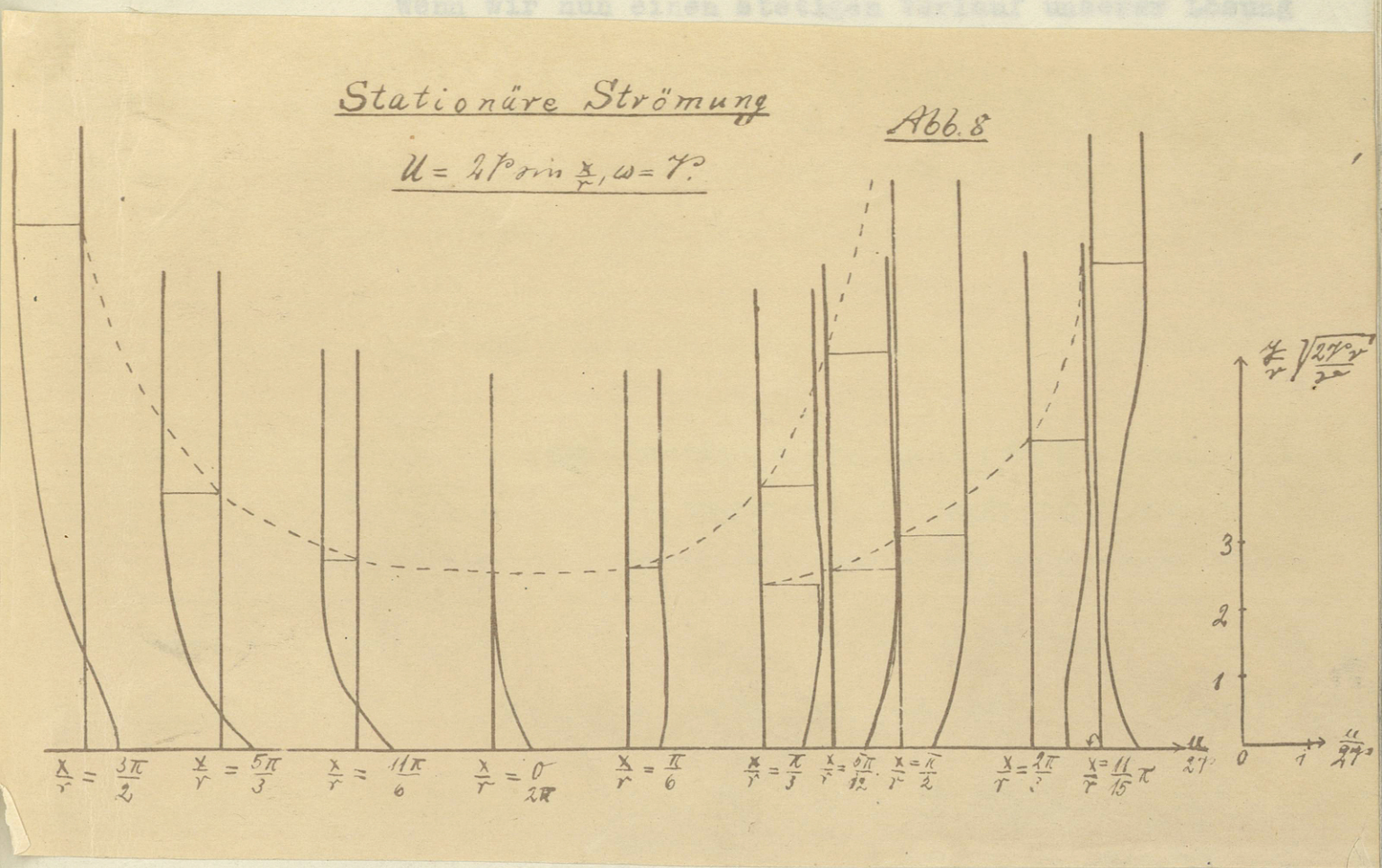
Dann Einsetzen dieses Ansatzes in den Impulssatz. Wir kön-

nen uns über das Aussehen der Lösung einige Gewissheit verschaffen, wenn wir $\frac{\partial \delta_1}{\partial t}$ aus der 1. Näherung (unter 2) entnehmen. Es zeigt sich (Abb.7,III), dass die exakte Lösung schon bedeutend besser angehähert ist.
Es sind überall zwei Werte der Grenzschichtdicke vorhanden; der eine Wert aber artet aus.

(Anmerkung: Dies Näherungsverfahren (unter 3) führt beim Problem das rotierenden Zylinders nur im stationären Fall und für $\omega = 0$ auf einfachere Rechnungen).

Durch die ausführliche Diskussion dieses Beispieles haben wir die Hilfsmittel entwickelt, um das Verhalten der Lösungen beim rotierenden Zylinder in der Umgebung von $u = w$ zu verstehen. - Wir hatten schon festgestellt, dass die temporären Kurven die singuläre Kurve I (Abb.6), die durch den Sattelpunkt 1. Art im 4. Quadranten geht, asymptotisch erreichen.
Im 1. Quadranten gibt es in der Umgebung von $u = w$ einen Sattel punkt 2. Art, dessen eine singuläre Kurve sich der Kurve I mehr und mehr nähert, während sich der anderen singulären Kurve (II) die temporären Kurven ebenfalls anschmiegen, allerdings nicht in asymptotischer Näherung. Als stationäre Lösungen haben wir nun offenbar nach dem vorhergehenden die Kurve I und II zu betrachten. Es gibt damit in der Umgebung von $u = w$ zwei Werte der Grenzschichtdicke, deren einer durch I, deren anderer durch II dargestellt wird, Der Wert auf I artet aus, indem er bei $u' = 0$ nach ∞ geht.

Die Betrachtung des Geschwindigkeitsprofiles bestätigt unsere Annahme (Abb.8)
Es zeigt sich, dass je zwei Geschwindigkeitsprofile in dem Gebiete der Doppeldeutigkeit von δ sehr wenig voneinander verschieden sind.



Die übrigen singulären Kurven liefern keine eigentlichen stationären Lösungen, was bei Betrachtung der temporären Kurven erhellt. Es fehlen nämlich hier die charakteristischen Formen des Anschlusses an die vorhergehenden stationären Kurven, wie wir sie oben zwischen I und II feststellten.

Aus den bisherigen Darlegungen wird klar, dass die Grenzschichtdicke δ physikalisch nicht so massgebend ist. Auch die Tatsache, dass bei verschiedengliedrigem Ansatz von $u(y)$ ganz verschiedene δ herauskommen, weist darauf hin, dass δ gewissermassen nur eine Rechengrösse darstellt; verständlich, wenn man bedenkt, dass δ anstelle eines streng genommen unendlichen Wertes in den Näherungen auftritt. -

Wenn wir nun einen stetigen Verlauf unserer Lösung erzielen wollen, können wir so verfahren. Wir mögen δ auf dem bisherigen Wege ermittelt haben und wiederum eine Lücke bekommen haben. Wenn wir nun ein δ nach Gefühl vorschreiben, indem wir die Lücke überbrücken, so können wir dann einen um ein Glied erweiterten Ansatz für $u(y)$ vorschreiben, dass nach Erfüllung der üblichen Randbedingungen noch ein Koeffizient freibleibt, der aus der Integralbedingung bestimmt wird. So ist es möglich, stets eine stetige Lösung herzustellen. Doch führt das Verfahren nur im stationären Fall auf einfache Rechnungen.

Kap. II. Spezielle Diskussion.

§ 1. Bei unveränderter äusserer Potentialströmung.

Nach dieser allgemeinen Diskussion wenden wir uns nunmehr den verschiedenen Typen unseres Problems zu. Die eingeprägte Strömung U soll zunächst, wie bisher die ursprüngliche Potentialströmung $U = 27^\circ \sin\frac{x}{r}$ sein. Die Gestalt der Isoklinen $z' = \infty$ wies uns schon darauf hin, welche Hauptfälle wir zu unterscheiden haben:

1) $\omega = 0$ 2) $\frac{\omega}{U_{max}} < 1$ 3) $\frac{\omega}{U_{max}} > 1$

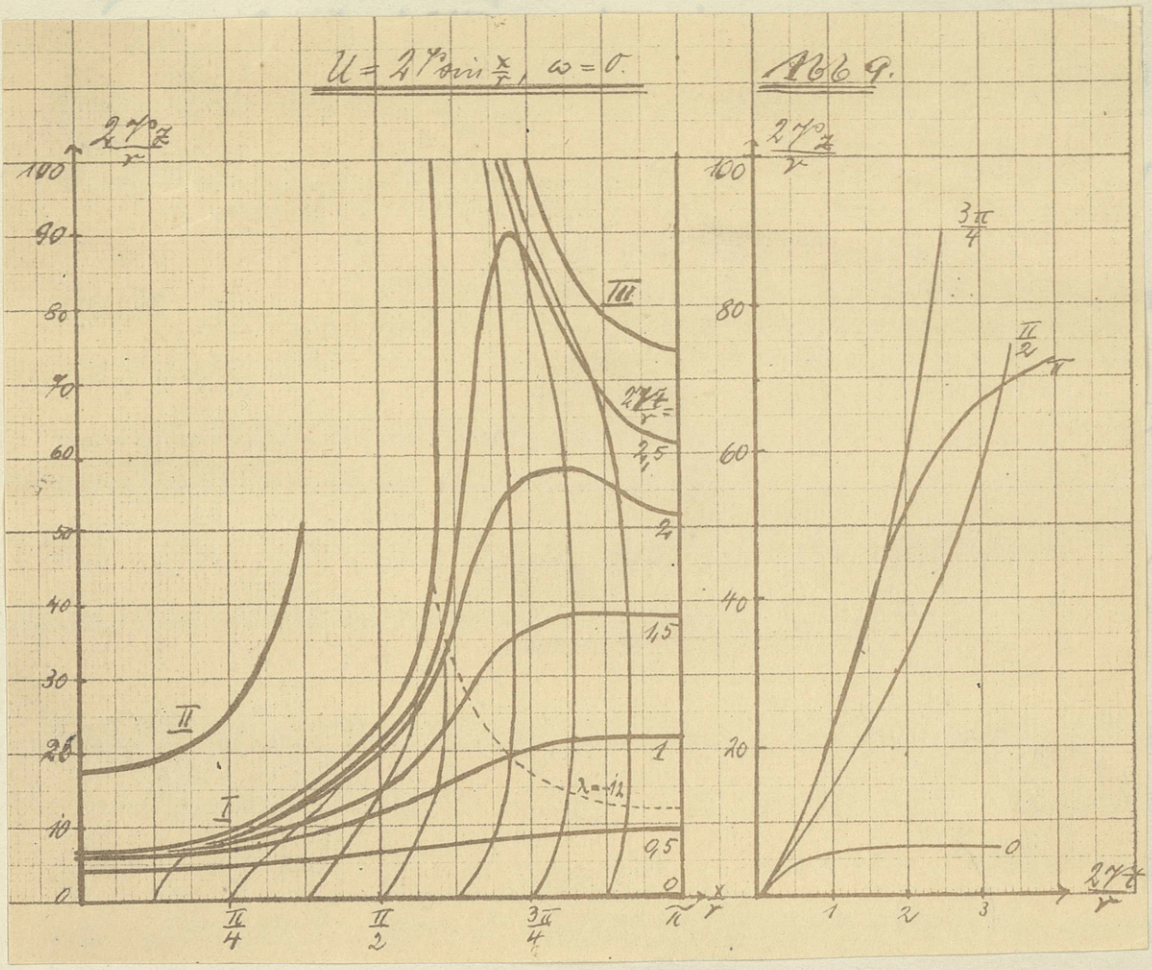
1) $\omega = 0$. Der stationäre Fall ist bereits von Pohlhausen (l.c.) untersucht worden. Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten hier:

$$z' = \frac{0{,}8\left[-9072 + \lambda\, 1670{,}4 + \lambda^2\left(-47{,}4 - 4{,}8\,\frac{UU''}{U'^2}\right) - \lambda^3\left(1 + \frac{UU''}{U'^2}\right)\right]}{U(-213{,}12 + 5{,}76\lambda + \lambda^2)},$$

$$t' = \frac{0{,}8 \cdot 56{,}7}{U(17{,}76 + \lambda)}.$$

Singuläre Punkte habe ich für $U = 0$ bei $\lambda = 7{,}052;\ 17{,}4;\ -73{,}8.$

Es sind Sattelpunkte, von denen die bei $\lambda = 7{,}052$ und $-73{,}8$ als Sattelpunkte 1. Art zu betrachten sind.(Abb.9)



In diesem Fall soll analytisch bewiesen werden, dass t für $\lambda = 7{,}052$ nach ∞ geht. Die charakteristische $z(x) =$ Kurve hat bei $U = 0$ die Gleichung $x = 0$, z beliebig. Es ist hier $\lambda = U'z = \frac{2\gamma}{r}\cos 0 \cdot z = \frac{2\gamma}{r} z = \bar{z}$. Die Projektion der charakteristischen Kurve bei $U = 0$ ist also im $(z,t) =$ Diagramm nach Gleichung (8) bestimmt durch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-9072 + 1670{,}4\,\bar{z} - 47{,}74\,\bar{z}^2 - \bar{z}^3}{-680{,}4 + 56{,}7\,\bar{z}},$$

Die Integration lässt sich in diesem Falle explizit ausführen:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{A_1}{\bar{z} - 7{,}052} + \frac{A_2}{\bar{z} - 17{,}4} + \frac{A_3}{\bar{z} + 73{,}8}, \text{ wobei}$$

die A reell sind. $A_1 = -0{,}335$.

$$\frac{2\pi}{r}t = -0{,}335 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z - 7{,}052\right| + A_2 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z - 17{,}4\right| + A_3 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z + 73{,}8\right| + \text{const}$$

$$= -0{,}335 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z - 7{,}052\right| + A_2 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z - 17{,}4\right| + A_3 \ln\left|\frac{2\pi}{r}z + 73{,}8\right| + 0{,}335 \ln 7{,}052 - A_2 \ln 17{,}4 - A_3 \ln 73{,}8$$

d.h. t geht für $\frac{2\pi}{r}z = 7{,}052$ nach ∞, die temporären Kurven nähern sich der singulären Kurve durch diesen Punkt asymptotisch. Die singuläre Kurve (I) durch $\frac{2\pi}{r}z = 7{,}052$ stellt offenbar die stationäre Lösung dar. Obwohl sich der singulären Kurve (III) im hinteren Staupunkt bei $\frac{2\pi}{r}z = 73{,}8$ die temporären Kurven analog anschmiegen, so können wir diese doch nicht als stationär betrachten, da zwischen I und III, wie die temporären Kurven zeigen, kein physikalisch begründeter Uebergang möglich ist. Die Vermutung, dass durch Berücksichtigung der veränderten eingeprägten Strömung bei fortschreitender Ausbildung der Grenzschicht diese singuläre Kurve III verschwinden würde, bestätigte sich nicht. Das Verhalten im hinteren Staupunkt deutet auf eine Mehrdeutigkeit von δ hin (u mehrfach gleich U, was auch durch die Blasiussche Lösung nicht ausgeschlossen wird), wobei der eine Wert etwa durch unsere Kurve III geliefert wird, der andere in Fortsetzung von I nach ∞ gerückt ist. Da wir uns aber bereits hier im Wirbelgebiet befinden, so wird die Grenzschichttheorie nichts Genaues mehr aussagen.

Die stationäre Lösung wird durch I dargestellt. Pohlhausen (l.c.) hat, da ihm nur das $(2x)$ =Diagramm zur Verfügung stand, unter diesen Kurven nach Symmetriegründen I als stationäre Lösung ausgewählt. Dieselben Gründe kann

aber auch die Kurve II durch den Sattelpunkt bei $\frac{2\pi}{\gamma} z = 17{,}4$ geltend machen. II wird, wenn wir die zeitliche Entwickelung einbeziehen, nicht von den temporären Kurven erreicht Indessen vermuten wir nach unsern allgemeinen Deutungsprinzipien, dass δ wiederum doppeldeutig wird und dass II einen "Doppelgänger" von I liefert, der bei $u = 0$ entartet, was durch Betrachtung des Profiles usw. bestätigt wird.

Beim Beispiel der in sich verschieblichen, hin und her schwingenden Wand hatten wir unter 3 (S.14)15) gesehen, dass die Näherung verbessert wird, wenn wir in dem Ansatz für $u(y)$ nicht bloss den Koeffizienten von y^2, sondern auch den von y^3 aus der Differentialgleichung der Grenzschicht (1) bestimmen. Dieser letzte muss für $\omega = 0$ im stationären Fall einfach verschwinden. Wir erhalten

$$u = U\left(\frac{2+3\lambda}{12}y - \frac{\lambda}{2}y^2 - \frac{10-3\lambda}{6}y^4 + \frac{4-\lambda}{4}y^5\right),$$

wenn wir die übrigen Grenzbedingungen aufrechterhalten. Die Integralbedingung liefert als Differentialgleichung des stationären Problems:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2079{,}00 + 1037{,}65\lambda + \lambda^2\left(24{,}54 + 18{,}75\frac{U''}{U'^2}\right) - \lambda^3 1{,}08\left(1 + \frac{U''}{U'^2}\right)}{U\left(-77{,}50 + 28{,}125\lambda + 1{,}35\lambda^2\right)}$$

Es zeigt sich auch hier das Auftreten von 3 singulären Kurven, entsprechend wie in der ersten Näherung. Ein theoretischer Fortschritt wird also in dieser Beziehung nicht erzielt. Aus anderen Gründen ist die numerische Durchführung des Verfahrens nicht ohne Interesse und soll deshalb später erfolgeh.

2. $\frac{w}{u_{max}} < 1.$

n Typ hatten wir bereit $\omega =$

ass wir über die stationären

ert sind.

rotierenden Zylinder bedarf

eim ruhenden Zylinder war diese

ickströmung bestimmt, der Ablö-

rch:

δ

bar diese Defination; denn

vorn herein Rückströmung für

ir hier den Verlauf der Grenz-

bietet sich als neue, durchaus

s dort Ablösung eintritt, wo δ

ionären Fall also $\frac{d\delta}{dx}$ bezw. $\frac{dz}{dx}$

der x = Richtung nicht weiter

h natürlich hierbei um ein

und nicht um ein "scheinbares",

eutigkeit von δ beim Ausarten

Beispiel bei $x = \frac{\pi}{2}$ auftritt.

gen im durchgerechneten Fall

τ .

n anderer Weise zu definieren,

.

war die "Verdrängungsdicke"

e Grösse, um welche die Strom-

nach aussen verschoben werden:

den Zylinder verliert auch die-

physikalische Bedeutung, wie

eigt. Behalten wir die formale

$\int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

$= \delta \left[0{,}3\left(1 - \frac{w}{u}\right) - \frac{\lambda}{120}\right].$

2. $\frac{w}{u_{max}} < 1$.

Als Beispiel für diesen Typ hatten wir bereit $\lambda = \frac{7}{3}$ ausführlich diskutiert, sodass wir über die stationären Lösungen u.ä. schon orientiert sind.

Einer Klärung für den rotierenden Zylinder bedarf der Begriff der Ablösung. Beim ruhenden Zylinder war diese durch das Eintreten einer Rückströmung bestimmt, der Ablösungspunkt ist definiert durch:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

Für $w \neq 0$ versagt offenbar diese Defination; denn durch die Rotation tritt von vorn herein Rückströmung für $\pi < \frac{x}{r} < 2\pi$ ein. Wenn wir hier den Verlauf der Grenzschichtdicke überblicken, so bietet sich als neue, durchaus anschauliche Definition, dass dort Ablösung eintritt, wo δ sehr stark ansteigt, im stationären Fall also $\frac{d\delta}{dx}$ bezw. $\frac{dz}{dx}$ nach ∞ geht, δ deshalb in der x = Richtung nicht weiter fortsetzbar ist. Es muss sich natürlich hierbei um ein "echtes Ende" von δ handeln und nicht um ein "scheinbares", wie es im Gebiet der Doppeldeutigkeit von δ beim Ausarten des einen δ im vorliegenden Beispiel bei $\frac{x}{r} = \frac{\pi}{2}$ auftritt.

Die Ablösungspunkte liegen im durchgerechneten Fall demnach bei $\frac{x}{r} = \frac{3\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Versuche, die Ablösung in anderer Weise zu definieren, hatten keinen rechten Erfolg.

Beim ruhenden Zylinder war die "Verdrängungsdicke" δ^* definiert als diejenige Grösse, um welche die Stromlinien der Potentialströmung nach aussen verschoben werden: $\delta^x = \frac{1}{u}\int_0^\delta q\,dy$. Beim rotirenden Zylinder verliert auch diese Grösse ihre anschauliche physikalische Bedeutung, wie das Geschwindigkeitsprofil zeigt. Behalten wir die formale Definition bei, so wird

$$\delta^x = \frac{1}{u}\int_0^\delta q\,dy$$
$$= \delta\left[0{,}3\left(1-\frac{w}{u}\right) - \frac{\lambda}{120}\right].$$

Wir sehen, dass δ^x negativ , sogar negativ unendlich werden kann.

Eine einfache physikalische Bedeutung behält nur

$$\int_0^\delta q\,dy = U\delta^x = \int_0^\delta (U-u)\,dy$$

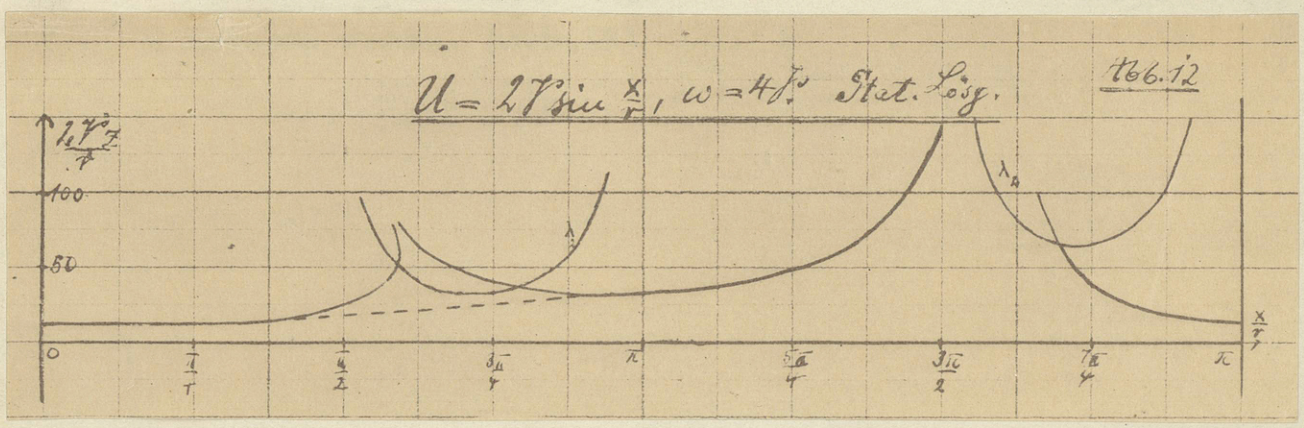
d.h. die wegen der Reibung eintretende Aenderung der durchfliessenden Menge.

Den Verlauf von $U\delta^x$ zeigt die Abb.10, einmal $\beta \cdot \frac{2\nu}{r} t = 1$, dann im stationären Fall.

Abb. 11 zeigt das Stromlinienbild innerhalb der Grenzschicht für $\frac{2\nu}{r} t = 1$.

3. $\frac{v}{U_{max}} > 1$

Als Beispiel nehmen wir $\omega = 45°$. Nach den allgemeinen Deutungsprinzipien finden wir aus dem Bild der temporären Kurven die stationären, in diesem Falle 2 singuläre Kurven, die durch singuläre Punkte 2. Art ~~und~~ 2. und 4. Qua-



Auf diese Kurven als auf stationäre würden wir auch geführt wenn wir bei stetigem Wachsen von ψ die Formänderung der Isoklinen $z' = \infty$ und damit im Zusammenhang die der singulären stationärem Kurven verfolgten. - Die beiden stationären Kurven stossen im 2. Quadranten mit einer Fuge zusammen, die wir uns etwa durch die gestrichelte Kurve überbrückt denken müssen.

Die Ablösungspunkte werden weiter im Sinne der Rota-

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}$

Rot. Zylinder

$0(2\pi)$

π

Grenzschicht bei der Anfahrt

$\frac{7\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{2}$

tion verschoben und liegen bei $\omega = 4P$ schon zusammen bei $\frac{x}{r} = \frac{\partial \pi}{2}$.

§ 2. Bei veränderlicher Potentialströmung.

Bisher hatten wir für U immer die ursprüngliche Potentialströmung angenommen. Doch wird U durch die Vorgänge in der Grenzschicht bedeutend verändert, besonders dadurch, dass sich Grenzschichtenmaterial vom Zylinder loslöst und Wirbel in die freie Flüssigkeit hinausgesandt werden. Beim rotierenden Zylinder wird dieser Ablösungsvorgang unsymmetrisch erfolgen, sodass überwiegend Wirbel des einen Sinnes abgehen werden. Die Zirkulation jedes abwandernden Wirbels muss nun ein Aequivalent in einer entgegengesetzt gleichen Zirkulation haben, die den Körper umkreist, sodass also U für spätere Zeiten Zirkulation aufweisen muss. Als stationäre Zirkulation der eingeprägten Strömung U stellt sich offenbar die ein, bei der die abwandernden Wirbelstärke insgesamt σ ist.

Die erste Näherung der neuen eingeprägten Strömung ist $U = 2P(\sin\frac{x}{r} + C)$ wenn die bisherige Einheitenbestimmung beibehalten wird.

Es ist nun nicht möglich, mit Hilfe der Grenzschichttheorie die abwandernden Wirbel zu erfassen. Wir können nur ungefähr Rückschlüsse aus der Wirbelsbildung in der Grenzschicht auf die abwandernden Wirbel machen.

Als relativ brauchbarstes Kriterium zur Feststellung der endgültigen Zirkulation C der ersten Näherung $U = 2P(\sin\frac{x}{r} + C)$ hat sich nach mancherlei Versuchen das folgende herausgestellt. Wir betrachten den Wirbeltransport durch eine Linie, die wir im konstanten Abstand $y < \delta_{max}$ um den Zylinder legen. Dieser wird durch das Integral $\int_0^{2\pi r} v \operatorname{rot} v \, dx$ dargestellt. Der Mittelwert aller dieser Integrale für

$0 \leqq y_i \leqq \delta_{max}$ ist

$$\frac{\int_0^{\delta_{max}} \int_0^{2\pi r} v \, rot \, w \, dx \, dy}{\delta_{max}}$$

In der Grenzschicht ist $rot\, w = \frac{\partial u}{\partial y}$, dagegen für $y > \delta$, in der Potentialströmung $rot\, w = 0$. Wir können nun annehmen, dass im stationären Fall dasjenige C auftritt, bei dem der mittlere Wirbeltransport 0 wird, also das Integral

$$E = \int_0^{\delta_{max}} \int_0^{2\pi r} v \, rot \, w \, dx \, dy = 0$$

ist.

Für die Wahl dieses Mittelwertes sprechen auch formale Gründe, denn E_1 lässt sich leicht in folgender Weise umformen:

$$\int_0^{\delta_{max}} \int_0^{2\pi r} v \, rot \, w \, dx \, dy = \int_0^{2\pi r} \int_0^{\delta_{max}} v \, rot \, w \, dy \, dx$$

$$\int_0^{\delta_{max}} v \, rot \, w \, dy = \int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = [v u]_0^{\delta} - \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} u \, dy,$$

was sich nach der Kontimuitätsgleichung umformen lässt:

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} u \, dy$$

$$= -U \int_0^{\delta} (U-q)' dy + \int_0^{\delta} (U-q)'(U-q) dy$$

$$= -\int_0^{\delta} U' q \, dy + \int_0^{\delta} q q' dy$$

$$= -U' \int_0^{\delta} q \, dy + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} q^2 dy$$

Integriere ich die einzelnen Summanden nach x zwischen den Grenzen 0 und $2\pi r$, so erhalte ich für

$$\int_0^{2\pi r} dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} q^2 dy = \left[\int_0^{\delta} q^2 dy \right]_0^{2\pi r} = 0$$

sodass also

$$\int_0^{2\pi r} \int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy \, dx = -\int_0^{2\pi r} U' \int_0^{\delta} q \, dy \, dx$$

wird, oder, wenn ich gemäss den Bezeichnungen auf S.24 setze:

$$\int_0^{\delta} q \, dy = U \delta^x$$

Also ist in unseren Ansätzen

$$E_1' = -\int_0^{2\pi r} U U' \sigma^x dx = -\int_0^{2\pi r} U' \left[0{,}3(U-\omega) - \frac{U\Lambda}{120}\right] \sigma\, dx$$

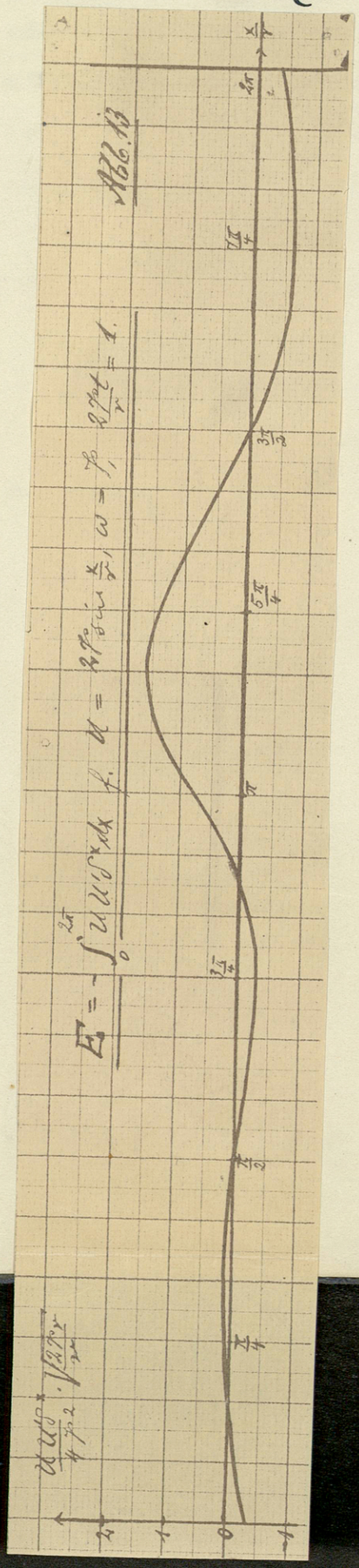
Bei positivem E_1 muss die Zirkulation C von U abnehmen, bei negativem E wachsen. Bei verschwindendem E_1 haben wir es mit der stationären Zirkulation zu tun.

Von formalen Eigenschaften des Integranden ist zu erwähnen, dass $UU'\sigma^x = \sigma$ wird

1) für $U' = \sigma$ d.h. bei $U = 2V(\sin\frac{x}{r} + C)$

für $\frac{x}{r} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$;

2) für $\lambda = 36\left(1 - \frac{\omega}{U}\right) = 3\lambda_m$.



Als Beispiel ist $UU'\sigma^x$ für $U = 2V\sin\frac{x}{r}, \omega = \frac{V}{2}, \frac{2Vt}{r} = 1$ aufgetragen. (Abb.13). Man sieht, dass E_1' hier negativ wird, dass also positive Zirkulation, im Sinne der Zylinderrotation um den Zylinder zurückbleiben muss. Den Hauptanteil $\frac{\partial w}{\partial} E_1'$ liefert der Integrand zwischen den Ablösungspunkten; für spätere Zeiten nimmt hier der absolutr Wert des Integranden noch zu.

Durch mehrfaches Probieren könnte man dann das endgültige C bestimmen, indem man für verschiedene C E_1 ermittelt usw. zusieht, für welches C E_1' annähernd σ bleibt.

In unserm Beispiel erkennt man, dass für $C > \sigma$ der Ue-

berschuss der abwandernden Wirbel des einen Sinnes kleiner wird als für $\varphi = \sigma$, da derjenige Nullpunkt des Integranden, der zwischen den Ablösungspunkten liegt und durch $\lambda = \lambda_2$ bestimmt ist, nach dem Ablösungspunkt bei $\frac{x}{r} = \frac{\pi}{2}$ zu verschoben wird, sodass das Ueberschussgebiet schmaler wird.

Es wird also möglich sein, sich auf diesem Wege ein Bild von den schliesslichen Strömungsverhältnissen zu machen.

Am Schluss meiner Untersuchung möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Prandtl meinen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit sowie seine Unterstützung bei Vollendung derselben aussprechen.

Lebenslauf.

Am 13.10.1900 wurde ich, Walter Tollmien, als Sohn des Militärinvaliden Gustav Tollmien in Berlin geboren. Meine Schulausbildung erhielt ich in der Hauptsache auf dem Melanchthongymnasium in Wittenberg. Im Oktober 1917 trat ich infolge der Kriegsverhältnisse in die Fabrik Gummiwerke "Elbe" bei Wittenberg ein, wo ich 1 1/2 Jahr tätig war. Im Sommersemester 1919 begann ich in Berlin mich besonders dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu widmen, das ich seit dem Herbst 1920 in Göttingen fortsetzte. Ich besuchte hauptsächlich die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Dozenten:

in Berlin:

Nernst, Rothe, Rubens +,

in Göttingen

Bernstein, Born, Courant, Franck, Hilbert,

Landau, Prandtl, Reich, Runge, Wiechert, Windaus.

Allen diesen schulde ich meinen Dank.